問題

(a)$2x^3+5x^2$ を微分せよ．

(b)x^n を n 回微分せよ．

解

(a) まず授業で学んだ公式 (i),(ii)（和の微分法と定数倍の微分法）により，

$$\begin{aligned}(2x^3+5x^2)' &= (2x^3)'+(5x^2)' \\ &= 2(x^3)'+5(x^2)' \end{aligned} \tag{1}$$

と変形できる．さらに，(iii) すなわちべき乗の微分法の公式で計算すると，

$$\begin{aligned}(2x^3+5x^2)' &= 2\cdot 3x^2+5\cdot 2x \\ &= 6x^2+10x. \end{aligned} \tag{2}$$

(b) べき乗の微分法の公式より，

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{3}$$

これをもう一度微分すると，

$$(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}. \tag{4}$$

[注：授業内で説明しなかったが，ダッシュ二つで二回微分するという意味になる．n 回微分は右上に (n) を付けて表すことにする．]

同じように微分を繰り返すと，x の前に次々と係数が出てきて，その度に x の肩が 1 ずつ減る．$(n-1)$ 回微分し終わったときには，

$$(x^n)^{(n-1)} = n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2x \tag{5}$$

となる [x の肩の数字は $n-(n-1)=1$ になる．また x の前の係数は，(肩の数字 +1) まで並ぶ]．もう一度微分すれば，

$$(x^n)^{(n)} = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1. \tag{6}$$

この右辺は n の**階乗**$n!$ の定義そのものであるから，結局

$$(x^n)^{(n)} = n! \tag{7}$$

を得る．